Es decir, estos dos vectores son soluci—n del sistema A! ! $\boldsymbol{o}$ y cualquier otra soluci—n es combinaci—n lineal de ellos.

Se puede demostrar que cuando se resuelve un sistema homogŽneo a partir de la forma escalonada reducida, el sistema generado es siempre linealmente independiente.

En este ejemplo la matriz A tiene 4 columnas, rango 2 (columnas 1 y 3 de la matriz escalonada) y nulidad 2 (columnas 2 y 4 de la matriz escalonada).

Teorema. Dimensi—n del espacio de soluciones.

Si ! es una matriz ! ‼ ‼ de rango r, la dimensi—n del espacio de soluciones del sistema ! ! ! ! es n ! r, esto es:

! ! !"#$%! ! ! ! !"#$%&%(A!

Demostraci—n

Puesto que ! tiene rango ! , sabemos que es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida ! con r filas no nulas. Sin pŽrdida de generalidad, suponemos que la esquina ! !x‼ superior izquierda de B es la matriz identidad !$_r$. Como las filas nulas de ! no contribuyen a la soluci—n, las descartamos para quedarnos con una matriz ! !, de tama–o ! ‼ ‼ !, donde B' ! !!$_!$ ∶ ! !. La matriz C tiene ! ! r columnas correspondientes a las variables $x_{r!}$ $_1$!! ! ! !, ! ,! ! . As’ pues, el espacio de soluciones de A! ! ! viene representado por el sistema:

$$\begin{cases} !_! \; ! \; !!! \; !! \; !_{11}x_{!+!} + c_{!"} \; !_{!!!} \; ! \; ! \; ! \; c_{!!-r}!_n \; ! \; 0 \\ !! \; !_2 !! ! !!! ! + c_{!"} \; x_{!!!} \; ! \; c_{!!} \; !_{!+!} + \cdots ! \; !_{!!-r}x_! \; ! \; ! \\ ! \\ !!! \; !!! \; !! \; !!!! \; !x_! + !_{r1}x_{r+1} + c_{!2}x_{!+!} \; ! \; ! + !_{!"} \, _{!!}!_! = 0 \end{cases}$$

Resolviendo en las primeras r variables, expresadas en tŽrminos de las ! ! ! œltimas, se obtienen $n - r$ vectores de la base del espacio de soluciones. En consecuencia, el espacio de soluciones tiene dimensi—n ! ! ! .

Ejemplo

Dada la matriz:

$$A \; ! \begin{bmatrix} 1 & ! & -2 & 1 & ! \\ ! & !\,1 & !\,! & ! & ! \\ !\,! & !\,! & 1 & !\,! & ! \\ ! & ! & ! & ! & !\,!" \end{bmatrix}$$

Denotemos los vectores columna por $\boldsymbol{a}_!$,! $_!$!! $_3$!! $_!$,! $_!$

a) Calcular el rango y la nulidad de A
b) Hallar un subconjunto de los vectores columna de A que formen base del espacio de columnas de A.
c) Escribir, si es posible, la tercera columna de ! como combinaci—n lineal de las dos primeras.

Soluci—n

Sea B la forma escalonada reducida por filas de ! :

$$! \ ! \begin{bmatrix} ! & ! & !\,! & ! & 0 \\ ! & !\,! & !\,3 & 1 & ! \\ !\,! & !\,! & ! & !\,! & ! \\ ! & ! & ! & ! & !\,!" \end{bmatrix} !! \quad !B = \begin{bmatrix} ! & 0 & !\,2 & ! & 0 \\ ! & 1 & ! & 0 & !\,4 \\ ! & ! & ! & ! & !\,1 \\ ! & ! & 0 & 0 & ! \end{bmatrix}!$$

1. ! tiene 3 filas no nulas, luego el rango de A es 3. Adem‡s A tiene ! ! ! columnas, de modo que la nulidad de ! es ! ! !"#$%(!) ! 5 − 3 ! !
2. Como las columnas 1, 2 y 4 de ! son linealmente independientes, las correspondientes columnas de ! :

$$\boldsymbol{a}_! \ ! \begin{bmatrix} 1 \\ ! \\ !\,! \\ 0 \end{bmatrix} \qquad !_! \ ! \begin{bmatrix} ! \\ !\,! \\ -! \\ ! \end{bmatrix} \qquad !_! \ ! \begin{bmatrix} ! \\ 1 \\ !\,! \\ ! \end{bmatrix}$$

   forman una base del espacio de columnas de ! .

3. La tercera columna de ! es combinaci—n lineal de las dos primeras: $!_! \ ! \ -!\,!_1 \ ! \ !\,!_!$, por tanto la misma relaci—n es v‡lida para las columnas correspondientes de ! :

$$!_! \ ! \begin{bmatrix} !\,! \\ !\,! \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \ !\,! \begin{bmatrix} ! \\ ! \\ !\,! \\ ! \end{bmatrix} ! \ ! \begin{bmatrix} ! \\ !\,! \\ !\,! \\ ! \end{bmatrix}$$

3.6.4 Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

ÀEs tambiŽn subespacio vectorial el conjunto soluci—n del sistema no homogŽneo ! ! $\boldsymbol{b}$? No, ya que el vector cero nunca es soluci—n del sistema.

No obstante existe una relaci—n entre los conjuntos de soluciones de los sistemas ! ! $\boldsymbol{o}$ y ! ! ! ! . Si $!_!$ es una soluci—n particular del sistema no homogŽneo, toda soluci—n del sistema es de la forma:

$$! \ ! \ !_! \ ! \ !_h$$

donde $!_!$!es una soluci—n del sistema homogŽneo asociado.

Teorema.

Si $!_!$ es una soluci—n particular del sistema ! ! ! , toda soluci—n de este sistema es de la forma

$$! \ ! \ \boldsymbol{x}_{p+}!_h$$

donde $!_!$!es una soluci—n del sistema homogŽneo asociado ! $\boldsymbol{x}$! $\boldsymbol{o}$

Demostraci—n

Sea ! una soluci—n cualquiera de ! ! ! . Entonces $(! \ ! \ !_!$! es soluci—n de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ porque:

$$!\left(\boldsymbol{x} - !_!\right) = !\,! - !\,!_! \ ! \ ! - ! = \boldsymbol{o}$$

Llamando $!_h$! ! ! $!_!$ obtenemos ! ! $\boldsymbol{x}_!$! $!_!$

Ejemplo

Hallar el conjunto de vectores soluci—n del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 ! \; ! x_3 ! \; x_! \; ! \; ! \\ ! \, x_! + x_! \; ! \; !!_! \; ! \; ! \\ !_! \; ! \; !!_! \; ! \; !!_! \; ! \; -! \end{cases}$$

Soluci—n

La matriz ampliada del sistema!! ! ! ! se reduce como sigue:

$$\begin{bmatrix} ! & ! & !! & ! & ! \\ 3 & ! & !! & ! & ! \\ ! & ! & ! & !! & -! \end{bmatrix} ! \longrightarrow \begin{bmatrix} ! & ! & !! & ! & ! \\ ! & ! & ! & !! & !\,7 \\ 0 & ! & ! & ! & ! \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales correspondiente a esta matriz escalonada reducida es:

$$\begin{cases} !_! \; ! \; !!_3 ! \; !_! \; ! \; ! \\ !_! \; ! \; !_! \; ! \; !!_! = ! \; ! \end{cases}$$

Haciendo $!_! \; ! \; s! \; !_! \; ! \; !$ podemos representar el vector soluci—n de! ! ! $\boldsymbol{b}$ como:

$$! \; ! \begin{bmatrix} !_! \\ !_! \\ !_! \\ !_4 \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} ! \, !! - !! \; ! \\ ! \; !! \; 3! - ! \\ !\,! \\ ! \end{bmatrix} ! \; ! \begin{bmatrix} ! \\ !\,! \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \; ! \begin{bmatrix} !\,! \\ ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} ! \\ !\,7 \\ ! \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$! \; ! \; s!_! \; ! \; t!_! \; ! \; !_!$$

Es f‡cil ver que $!_!$ es una soluci—n particular de! ! ! ! y $!_! \; ! \; !!_! \; ! \; !!_!$ representa un vector arbitrario del espacio de soluciones de ! ! ! ! .

Teorema. Compatibilidad de un sistema lineal

El sistema de ecuaciones lineales ! $\boldsymbol{x}$! ! es compatible s', y s—lo s',! !pertenece al espacio de columnas de ! .

Demostraci—n

Sean:

$$! \; ! \begin{bmatrix} !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!!} \\ !_{!"} & !_{!!} & ! & !_{!!} \\ ! & ! & ! & ! \\ !_{!\,!} & !_{!\,2} & ! & !_{!"} \end{bmatrix} !!!!!! \; ! \begin{bmatrix} !_! \\ !_! \\ ! \\ x_! \end{bmatrix} !!!\,!!!! \; ! \; ! \begin{bmatrix} !_1 \\ b_! \\ \vdots \\ !_! \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes, el vector columna de inc—gnitas y el vector columna de los tŽrminos independientes, respectivamente del sistema ! ! ! ! . Entonces:

$$\begin{bmatrix} !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!!} \\ !_{!"} & !_{!!} & \cdots & !_{!!} \\ ! & ! & ! & ! \\ !_{m!} & !_{!\,!} & \cdots & !_{mn} \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} !_! \\ !_! \\ ! \\ !_! \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} !_{!!} \, !_! \; ! \; a_{!"} \, !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \, x_! \\ !_{!"} \, !_! \; ! \; !_{!!} \, !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{2n} x_! \\ \vdots \\ !_{!\,!} \, !_! + !_{m!} \, !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!"} \, !_! \end{bmatrix} !$$

$$= !_! \begin{bmatrix} !_{!!} \\ !_{!"} \\ ! \\ !_{!\,!} \end{bmatrix} ! \; x_! \begin{bmatrix} !_{!"} \\ !_{!!} \\ ! \\ !_{!\,!} \end{bmatrix} ! \; ! \; ! \; !_! \begin{bmatrix} !_{!!} \\ !_{!!} \\ ! \\ !_{!"} \end{bmatrix}$$

Por tanto, ! ! ! ! s', y s—lo s',! es combinaci—n lineal de las columnas de! . Es decir, es sistema es compatible s', y s—lo s,' ! pertenece al subespacio de ! ^{m} generado por las columnas de ! .

Ejemplo

ConsidŽrese el sistema lineal:

$$\begin{cases} x_1 + x_! \; ! \; !_! \; ! \; ! \; ! \\ !_! + x_! \; ! \; ! \\ ! \, !_! \; ! \; ! \, !_! \; ! \; !_! = ! \end{cases}$$

La matriz de coeficientes se reduce:

$$! \; ! \begin{bmatrix} ! & 1 & ! \, ! \\ ! & ! & ! \\ ! & ! & ! \, ! \end{bmatrix} !! \quad ! \begin{bmatrix} ! & ! & ! \\ ! & ! & ! \, ! \\ ! & ! & 0 \end{bmatrix}$$

Se observa que el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Procedemos de igual forma con la matriz ampliada:

$$[! \; ! \, ! \,] \, ! \begin{bmatrix} 1 & ! & ! \, ! & ! \, ! \\ ! & ! & ! & ! \\ ! & ! & ! \, ! & ! \end{bmatrix} \; ! \quad ! \begin{bmatrix} ! & ! & ! & ! \\ ! & ! & ! \, ! & ! \, ! \\ ! & ! & ! & ! \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz ampliada es 2, por tanto ! est‡ en el espacio de columnas de ! y el sistema es compatible.

3.6.5 Sistemas lineales con matriz de coeficientes cuadrada

Resumen de condiciones equivalentes para matrices cuadradas:

Si ! es una matriz cuadrada de orden ! , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. ! es invertible
2. ! ! ! ! tiene soluci—n œnica para cualquier matriz ! de tama–o ! !! !! .
3. ! ! ! ! tiene s—lo la soluci—n trivial
4. ! es equivalente por filas a la matriz identidad de orden ! , !$_!$.
5. |! | ! !
6. !"#$% (!) ! !
7. Los vectores fila de ! son linealmente independientes.
8. Los ! vectores columna de ! son linealmente independientes.

3.7 Cambios de base en ! $^{!}$

Sean ! ! {$\boldsymbol{v}_!$!! $_!$!! !! $_!$! y ! !! {! $_1$!$\boldsymbol{u}_2$,! !! $_!$! dos bases de un espacio vectorial ! . Si

$$\begin{cases} !_! \; ! \; !_{!!} \, !_! \; ! \; !_{!"} \, !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \, !_! \\ !_! \; ! \; !_{!"} \, !_! \; ! \; !_{!!} \, !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \, !_! \\ ! \\ !_! \; ! \; !_{!!} \, !_! \; ! \; !_{!!} \, !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \; !_! \end{cases}$$

entonces la matriz de cambio de ! a ! ! es:

$$! \; ! \begin{bmatrix} !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!\,!} \\ !_{!"} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} \\ ! & ! & ! & ! \\ !_{!\,!} & !_{!\,!} & ! & !_{!!} \end{bmatrix}$$

Demostraci—n

Sea ! ! $d_! !_!$! $!_! !_!$! ! $+ !_! !_!$ un vector arbitrario de V. Su matriz de coordenadas en la base B es, por tanto:

$$! \; ! \begin{bmatrix} !_! \\ !_! \\ ! \\ !_! \end{bmatrix}$$

As’ pues:

$$! \; [! \, !_! \; ! \begin{bmatrix} !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!\,!} \\ !_{!"} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} \\ ! & \vdots & ! & ! \\ c_{!\,!} & !_{!\,!} & ! & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} !_! \\ d_! \\ ! \\ d_n \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} !_{!!} \, !_! \; ! \; !_{!"} \, !_! + ! \; ! \; !_{!\,n} d_! \\ c_{!"} \, d_1 + c_{22} d \; ! \; ! \; ! \; !_{2!} \, !_! \\ ! \\ !_{!\,!} \, !_! + !_{n!} \, d_! \; ! \; ! + !_{nn} \, !_n \end{bmatrix}$$

Por otra parte, podemos escribir:

$$! \; ! \; !_! \, !_! \; ! \; d_2 !_! \; ! \; \cdots + !_! \, \boldsymbol{v}_! \; ! \; d_! \, (c_{11} !_1 + c_{21} !_2 + \cdots + c_{!\,!} \, !_!) ! \; \cdots + d_! \, (!_{!\,n} !_1 \; ! \; c_{!\,n} !_2 \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \, \boldsymbol{u}_!) \; !$$

$$! \; (!_! \, !_{11} \; ! \; \cdots + !_n !_{1!}) !_! \; ! \; ! \; ! \; (!_! \, !_{!\,!} \; ! \; ! \; ! \; !_n !_{!!} \;) !_!$$

lo cual implica que:

$$[\boldsymbol{v}]_{!\,'} \; ! \begin{bmatrix} c_{!!} \, d_! + !_{12} !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!\,!} \, !_! \\ !_{!"} \, !_! \; ! \; !_{22} !_! \; ! \; ! + !_{!\,!} \, d_! \\ ! \\ !_{!\,!} \, !_! \; ! \; !_{!\,!} \, !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \; !_! \end{bmatrix}$$

Por tanto ! $!\boldsymbol{v}!_! = [! \,]_{!\,!}$ y concluimos que ! es la matriz de cambio de ! a ! $'$.

> **Teorema. Inversa de la matriz de cambio de base.**
>
> Si ! es la matriz de cambio de una base ! $'$ a otra base ! de ! $^!$, ! es invertible, y la matriz del cambio de ! a ! ! viene dada por ! $^{!\,!}$.

Demostraci—n

Por lo demostrado anteriormente, sea ! la matriz de cambio de base de ! a ! !. Entonces:

$!! \, !_! \; ! \; P[\boldsymbol{v}]_{!\,!}$ y $[! \,]_{!\,!} \; ! \; ! \; [\boldsymbol{v}]_!$

Lo cual implica que $!\boldsymbol{v}!_! \; ! \; !" \; !! \, !_!$ para todo vector ! de ! ^{n}. De ah’ se sigue que !" ! $!_!$. En consecuencia ! es invertible y $P^{!\,!}$! Q, la matriz de cambio de ! a ! !.

Teorema. Sean ! ! {! $_1$, $\boldsymbol{v}_!$, ...!! $_!$! y ! ! {$\boldsymbol{u}_1$!! $_!$!! !! $_!$! dos bases de $\mathbb{R}^!$. La matriz de cambio de B a ! ′ se puede hallar aplicando el mŽtodo de eliminaci—n de GaussJordan a la matriz !! $^!$! ! ! como sigue:

$$[B' \; ! \; ! \; ! \; ! \quad [!_n \vdots ! \; ^{!\,!} !$$

Demostraci—n

Supongamos que:

$$\begin{cases} !_1 \; ! \; c_{!!} \; !_! \; ! \; !_{!''} \; !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!\,!} !_! \\ !_! \; ! \; !_{!''} \; !_! \; ! \; !_{!!} \, \boldsymbol{u}_! \; ! \; ! \; + !_{n2} \boldsymbol{u}_! \\ \vdots \\ !_n \; ! \; c_{!\,!} \; !_! + !_{!\,!} \; !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \; !_! \end{cases}$$

de modo que:

$$c_{!\,!} \begin{bmatrix} !_{!!} \\ !_{!''} \\ \vdots \\ !_{!\,!} \end{bmatrix} ! \; !_{!\,!} \begin{bmatrix} !_{!''} \\ !_{!!} \\ ! \\ !_{!\,!} \end{bmatrix} ! \; ! \; ! \; !_{!''} \begin{bmatrix} !_{!\,!} \\ !_{n!} \\ \vdots \\ !_{!!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} !_{!!} \\ !_{!!} \\ ! \\ !_{!''} \end{bmatrix} !!"\#" \; !! \; ! \; ! !! !! \; !!$$

Esta ecuaci—n vectorial da lugar, componente a componente, al sistema lineal:

$v_{!!}$! $!_! i !_{!!}$! $!_{!\,!} !_{!''}$! ! ! $!_{!''} !_{!\,!}$
$!_{!!}$! $c_{1!} !_{12} + c_{2!} !_{!!} + \cdots + !_{!''} !_{!\,!}$!!!"#" !! ! ! !! !! !!
!
$!_{!''}$! $!_{!\,!} !_{!\,!}$! $!_{!\,!} !_{!\,!}$! $\cdots$! $!_{!''} !_{!!}$

Como los ! sistemas tienen la misma matriz de coeficientes los podemos reducir simult‡nelamente usando la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} !_{!!} & !_{!''} & ! & !_{!\,!} & ! & !_{!!} & !_{!''} & ! & !_{!\,!} \\ !_{12} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} & ! & !_{!''} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} \\ ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! \\ !_{!\,!} & !_{!\,!} & ! & !_{!!} & ! & !_{!\,!} & !_{!\,!} & ! & !_{!!} \end{bmatrix}$$

Aplicando el mŽtodo de eliminaci—n de GaussJordan a esta matriz, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} ! & ! & ! & ! & ! & !_{!!} & !_{!''} & ! & !_{!\,!} \\ ! & ! & ! & ! & ! & !_{!''} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} \\ ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! \\ ! & ! & ! & ! & ! & !_{!\,!} & !_{!\,2} & ! & c_{!!} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, por lo demostrado anteriormente la parte derecha de esta matriz es ! ! $P^{!\,1}$, luego la matriz tiene la forma:

$$[I_! \; \vdots \; P^{!\,!}]$$

lo cual demuestra el teorema.

Ejemplo

Hallar la matriz de cambio de base de ! a ! ! para las bases de ! $^!$:

$! \; = \{(! , ! , !), (! , ! !!)!(! !! !1)\}$ y $! \; ' = \{(! !! !1)!(! !-1!!), (! , ! , ! \; 5)\}$

Soluci—n

Con los vectores de las dos bases formamos las matrices ! y B!:

$$! \; ! \begin{bmatrix} ! & ! & ! \\ ! & ! & ! \\ ! & 0 & ! \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad !\,' = \begin{bmatrix} ! & 0 & 2 \\ ! & !\,1 & ! \\ 1 & ! & -! \end{bmatrix}$$

Ahora construimos !! ! ! ′! y usamos Gauss-Jordan para reescribirla como [! ⋮ ! $^{-!}$]:

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 2 & ! & 1 & 0 & 0 \\ ! & -! & ! & ! & ! & ! & ! \\ ! & ! & !\,5 & ! & ! & ! & ! \end{array}\right] ! \longrightarrow ! \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & ! & 0 & ! & -! & 4 & ! \\ 0 & ! & 0 & ! & 3 & !\,7 & !\,3 \\ ! & 0 & ! & \vdots & 1 & !\,2 & -! \end{array}\right]$$

Por tanto la matriz de cambio de ! a B! es:

$$!^{\,-!} = \begin{bmatrix} !\,1 & 4 & ! \\ 3 & !\,7 & !\,3 \\ ! & -! & !\,! \end{bmatrix}$$

Si ! es la base can—nica, como en el ejemplo anterior, el proceso de transformar !! ! ! $^!$! a [!$_!$! ! $^{!\,1}$] se convierte en:

$$[B' \,!\, I_!\,] \;\; ! \quad [!_n \,!\, P^{!\,1}]$$

Pero este es el mismo proceso utilizado para calcular la inversa de la matriz B!. Es decir, si ! es la base can—nica de! $^!$, la matriz de transici—n de! a ! ! viene dada por:

$$!^{\,-!} = !B^!)^{!\,1}$$

El proceso es aœn m‡s simple si$B$! es la base can—nica, ya que la matriz! ⋮ ! $^!$] est‡ ya en la forma

$$[I_! \;\vdots\, !\,] = [!_! \;!\,!^{\,-!}\,]$$

En este caso la matriz de transici—n es simplemente:

$$!^{\,-1} = !$$

Ejemplo

Hallar la matriz de cambio de B a B! para las siguientes bases de ! $^!$:

$$! \;\; ! \;\; \{(! \;!\,!!\,)!\,(!\,!-!\,)\}$$

$$!\,' = \{(-!\,!!\,), (2!-!\,)\}$$

Soluci—n

Empezamos formando la matriz:

$$[!\,!\,!\,!\,]\,! \begin{bmatrix} !\,1 & ! & ! & !\,3 & ! \\ 2 & -2 & ! & 2 & !\,2 \end{bmatrix}$$

y usamos el mŽtodo de eliminaci—n de GaussJordan para obtener la matriz de cambio $P^{-!}$ de ! a ! !:

$$[!_! \;!\,!^{\,!\,!}\,]\,! \begin{bmatrix} ! & ! & ! & !\,! & ! \\ ! & 1 & ! & -! & 3 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$! \,!\, ^{1}\, ! \begin{bmatrix} -! & ! \\ ! \; ! & 3 \end{bmatrix}$$

Podr'amos calcular la matriz de cambio de B! a ! obteniendo:

$$[! \;\; ! \, ! \, '] \, ! \begin{bmatrix} ! \; 3 & 4 & \vdots & -! & ! \\ 2 & ! \; ! & ! & ! & ! \; ! \end{bmatrix}$$

que se reduce a:

$$[I_2 \, ! \, ! \,] \, ! \begin{bmatrix} ! & ! & \vdots & 3 & ! \; 2 \\ ! & ! & ! & ! & -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto la matriz de cambio de ! ! a ! es:

$$P \, ! \begin{bmatrix} ! & ! \; ! \\ ! & ! \; 1 \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar que esta matriz es la inversa de la matriz de cambio hallada anteriormente sin m‡s que calcular el producto:

$$PP^{! \, !} = \begin{bmatrix} ! & -2 \\ 2 & ! \; ! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ! \; ! & ! \\ ! \; ! & ! \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} ! & ! \\ ! & ! \end{bmatrix} ! \; !_!$$

3.7.1 Coordenadas en espacios generales n-dimensionales

Una ventaja de las coordenadas es que nos permiten representar vectores de un espacio ! -dimensional arbitrario con la notaci—n de ! $^{!}$ como vemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo

Hallar la matriz de coordenadas de ! (!) = ! ! $^{!}$! ! $x^{!}$ + 4 en la base can—nica de ! $_3$, ! ! !! !! !! $^{!}$!! $^{!}$!.

Solución

En primer lugar expresamos ! !! ! como combinaci—n lineal de los vectores de la base:

$$! \, (! \,) \, ! \;\; ! \, (! \,) \, ! \;\; ! \, (! \,) \, ! \;\; (! \; ! \,)(!^{\,!}) \, ! \;\; ! \, (!^{\,!})$$

Esto quiere decir que la matriz de coordenadas de ! (!) en la base ! es:

$$!! \, (! \,)]_! \; ! \begin{bmatrix} ! \\ 0 \\ ! \; ! \\ ! \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Hallar la matriz de coordenadas de:

$$! \;\; ! \begin{bmatrix} ! \; ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix}$$

en la base can—nica de ! $_{!\,!!}$!

$$! \;\; ! \left\{ \begin{bmatrix} ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

Como ! se puede escribir:

$$X = \begin{bmatrix} ! \; 1 \\ 4 \\ ! \end{bmatrix} ! \;\; (! \;\; !) \begin{bmatrix} 1 \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \;\; ! \begin{bmatrix} 0 \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \;\; ! \begin{bmatrix} ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix}$$

su matriz de coordenadas en la base ! es:

$$[! \; !_S \; ! \begin{bmatrix} ! \;\; ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix}$$